« Il n'existe pas d'idée franchement mauvaise, ce qui est franchement mauvais, c'est de ne pas avoir d'idée du tout. »

George PÓLYA (1887-1985)

Cahier de vacances

Mathématiques

— Lycée Jean-Baptiste Kléber —

« Rien n'est beau comme Kléber un jour de combat. »
Napoléon BONAPARTE

Préambule

Nous avons conçu ce polycopié afin que vous abordiez l'année de Sup dans les meilleures conditions.

Les deux années de préparation aux concours comportent un programme conséquent en mathématiques qui s'appuie sur ce que vous avez vu en classe de Première et de Terminale. Il importe donc que vous ayez des bases solides sur lesquelles vous pourrez vous appuyer dès la rentrée prochaine.

Afin que vous soyez efficaces dès votre arrivée en Sup, nous vous recommandons

- *de bien vous reposer pour être en bonne forme physique,*
- *de suivre le planning de travail indiqué dans ce polycopié.*

Quelques explications sur le travail attendu :

Le planning est prévu sur les quinze derniers jours de vacances. Un thème différent est abordé chaque jour.

En premier lieu, nous vous conseillons d'aller revoir le cours et les exercices de Première et/ou Terminale correspondant au thème abordé.

Ensuite, nous vous proposons des exercices : il s'agit d'énoncés que vous travaillerez pour vérifier vos acquis et/ou vous rendre compte de vos difficultés éventuelles. Nous vous suggérons d'y consacrer environ deux heures par journée.

Certains exercices sont faciles, d'autres moins. L'objectif n'est pas de terminer chaque jour tous les exercices prévus. L'essentiel est, pour chaque énoncé, soit que vous sachiez le résoudre, soit que vous ayez des questions à nous poser sur le sujet. Puis nous les reprendrons, les corrigerons ou les approfondirons éventuellement à la rentrée.

Nous vous invitons à collecter vos solutions ou vos questions dans un cahier afin que vous puissiez utiliser au mieux votre travail à la rentrée. N'oubliez pas de bien noter vos difficultés ou points de blocage pour nous en parler à la rentrée. Nous mettons également à votre disposition l'adresse mail suivante : `kleber.questions@gmail.com` *si vous avez des questions urgentes.*

Et maintenant, bonnes vacances, bonne lecture et bon travail,

Les professeurs de Mathématiques
du lycée Kléber

Lundi 8 août : trigonométrie

En mathématique, c'est comme dans un roman policier
ou un épisode de Columbo ; le raisonnement par lequel
le détective confond l'assassin est au moins aussi important
que la solution du mystère elle-même.

Cédric VILLANI (1973-)

Exercice 1 . — Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$ en vous servant du cercle trigonométrique. Par exemple : $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$.

1°) $\cos(-x) =$

2°) $\cos(\pi + x) =$

3°) $\sin(-x) =$

4°) $\sin(2\pi - x)$

5°) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) =$

6°) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) =$

Exercice 2 (valeurs particulières). — Compléter :

$$\begin{array}{llll} \cos(0) = 1 & \sin(0) = \dots & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \cos(\pi) = \dots & \sin(3\pi) = \dots & \cos(2\pi) = \dots & \sin(8\pi) = \dots \end{array}$$

Exercice 3 . — Tracer une représentation graphique des fonctions cosinus et sinus en y faisant apparaître les valeurs particulières précédentes.

Exercice 4 . — Déterminer tous les $x \in [0, 2\pi]$ tels que $\cos(x) = 0$.

Exercice 5 . — Déterminer tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(x) = 0$.

Exercice 6 . — Déterminer tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(x) \geqslant 0$.

Exercice 7 (formules de trigonométrie). — Compléter (si possible de tête, sinon ressortir son cours sur le sujet) ces formules de trigonométrie. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \\ &\cos(x+y) = \\ &\sin(x+y) = \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\cos(2x) = \\ &\sin(2x) = \end{aligned}$$

Exercice 8 . — Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En écrivant les formules de $\cos(x+y)$ et $\cos(x-y)$, donner une formule de $\cos(x)\cos(y)$ et de $\sin(x)\sin(y)$. En déduire la valeur de

$$\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(3t)\,\mathrm{d}t.$$

Mardi 9 août : calculs algébriques, développer, factoriser

Wir müssen wissen, wir werden wissen.

David HILBERT [1] (1862-1943)

Exercice 1 . — Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes en essayant de faire un maximum de calcul de **tête**.

1°) $\big((a-c)-(a-b)\big)-\big((b-c)-(a+c)\big) =$

2°) $1-\big(1-(1-a)\big)-\big(1-(1-b)\big)-\big(1-(1-c)\big) =$

3°) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) =$

4°) $(a+b)^3 =$
Indication : vous savez que $(a+b)^2 = \ldots$

5°) $(a+b)^4 =$

6°) $(a+b+c)^2 =$

Exercice 2 . — Soit n un entier naturel. Calculer les expressions suivantes en simplifiant au maximum ; le résultat doit être mis sous la forme a^b où $a, b \in \mathbb{N}$.

1°) $2^n + 2^n =$

2°) $3.4^n + 2^{2n} =$

3°) $3^{2n} 4^n =$

4°) $3^n 9^n =$

5°) $5^{(2^n)} 5^{(2^n)} =$

6°) $\left(3^{(2^n)}\right)^{(2^n)} =$

7°) $2^{n+1} - 2^n =$

Exercice 3 . — Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Simplifier ces fractions au maximum ; le résultat doit être mis sous la forme $\frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$ sont les plus simples possibles.

1°) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

2°) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

3°) $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$

4°) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$

5°) $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

6°) $\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1}$

7°) $\dfrac{\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}$

8°) $\dfrac{\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}$

9°) $\dfrac{\left(\frac{1}{n^2-1}\right)}{\left(\frac{1}{n-1}\right)}$

Exercice 4 . — Identités remarquables : un petit rappel ne fait jamais de mal ! Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Compléter :

$(a+b)^2 =$ $\qquad (a-b)^2 =$ $\qquad a^2 - b^2 =$

Exercice 5 . — Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum les expressions suivantes. Par exemple, l'expression $\mathrm{A} = x^2 - 9$ donne $\mathrm{A} = (x-3)(x+3)$ lorsqu'on la factorise.

1°) $\mathrm{B} = 4x^2 - 4x + 1$

2°) $\mathrm{C} = 200 - 2x^2$

3°) $\mathrm{D} = 1 - x^4$

4°) $\mathrm{E} = x^2 - 6x + 9$

5°) $\mathrm{F} = x - 6\sqrt{x} + 9$ (Ici $x \geqslant 0$.)

6°) $\mathrm{G} = x^2 - 5x + 6$
(On pourra chercher à résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$.)

7°) $\mathrm{H} = xy + x + y + 1$

8°) $\mathrm{I} = xy - y - x + 1$

9°) $\mathrm{J} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
(On pourra chercher une solution évidente de l'équation $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.)

1. Cette phrase est gravée sur sa pierre tombale, à Göttingen, où de nombreux mathématiciens et autres scientifiques sont enterrés.

Mercredi 10 août : équations

An expert is a man who has made all the mistakes that can be made in a very narrow field

Niels BOHR (1885-1962)

Exercice 1 .— Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

1°) $\dfrac{x-1}{2x} = \dfrac{x}{2x-1}$.

2°) $\dfrac{x}{1-x} + 4 = \dfrac{2x}{x-1}$.

3°) $8x^3 - 27 = 0$.

4°) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} = 1$.

5°) $\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}} = 1$.

6°) $(x+3)^{2016} = (x+3)^{2013}$.

Exercice 2 .— Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

1°) $2x^2 - x + 3 = x^2 - x + 5$.

2°) $\dfrac{1}{1-x^2} - \dfrac{1}{x-1} = 2$.

3°) $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{4-x^2}} = 1$.

4°) $x^8 - 2x^4 + 1 = 0$.

Exercice 3 .— On considère un réel a fixé. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_a) d'inconnue un réel x et définie par :

$$(E_a) : \quad ax^2 + (1-x)^2 = 3ax.$$

On sera éventuellement amené à traiter différents cas suivant les valeurs de a.

Exercice 4 .—

1°) Résoudre le système suivant d'inconnues réelles x, y :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 3, \\ 2x & - & 3y & = & 4. \end{array} \right.$$

2°) Résoudre le système suivant d'inconnues réelles x, y :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -1, \\ 8x & + & 16y & = & 4. \end{array} \right.$$

Jeudi 11 août : encadrements

Savoir n'est pas suffisant, il faut appliquer
Vouloir n'est pas suffisant, il faut accomplir.

Bruce LEE (1940-1973)

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 .— Ranger par ordre croissant et sans l'aide de la calculatrice, les réels suivants :

$$(-0{,}2)^3, \qquad (0{,}1)^2, \qquad (-0{,}1)^3, \qquad (-0{,}1)^4, \qquad \frac{7}{2}, \qquad \sqrt{10}, \qquad 3, \qquad (\sqrt{2})^3.$$

Exercice 2 .— Chercher un encadrement suffisamment précis, par des nombres rationnels, des réels suivants :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \qquad \frac{\sqrt{12}}{2}.$$

Exercice 3 .— Soit $x \in [0,2]$.

1°) Montrer que

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{2x^2+1}{x+1} \leqslant 9.$$

2°) Montrer que

$$-5 \leqslant \frac{x^2+1}{x-3} \leqslant -\frac{1}{3}.$$

Exercice 4 (vrai-faux).— Dans ce qui suit, les variables a, b et c désignent des nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ; lorsque l'une des affirmations est fausse, on donnera un contre-exemple.

1°) Si $a < b < c$ alors $a^2 < b^2 < c^2$.

2°) Si $a < b < c$ où a, b, c sont des nombres non nuls alors $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

3°) Si $a \geqslant 0$ alors $\sqrt{a} \leqslant a$.

4°) Si $a \in \mathbb{R}$ alors $a^2 < a^3 < a^4$.

5°) Si $a < 0$ alors $\sqrt{a^2} < 0$.

Exercice 5 (min-max).—

1°) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n} \leqslant \frac{n}{2}.$$

2°) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 3\times 5\times 7\times \ldots \times (2n+1) \leqslant (2n+1)^n.$$

Vendredi 12 août : inégalités

On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres : mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.

Henri Poincaré (1854-1912)

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 .— Pour chaque item, trouver tous les réels x vérifiant l'inégalité proposée :

1°) $|1-x| \leqslant 2$.

2°) $3-27x^2 \leqslant 0$.

3°) $\dfrac{1-x^2}{2x-2} > \dfrac{3-x}{2}$.

4°) $\dfrac{x}{2-x} - 1 < \dfrac{3x-5}{x-2}$.

Exercice 2 .—

1°) Trouver tous les réels x vérifiant l'inégalité :

$$x > 2 + \frac{3}{x}.$$

2°) Trouver tous les réels x vérifiant l'inégalité :

$$\frac{x-8}{2x-1} - 1 \leqslant \frac{4}{1-x}.$$

Exercice 3 .— Déterminer le tableau de signe en fonction de x de

$$q(x) = \frac{2x^2+x-1}{2x-x^2-2}.$$

Exercice 4 .— Trouver tous les réels x vérifiant l'inégalité proposée :

$$\sqrt{x+1} > \sqrt{2x^2+x}.$$

Exercice 5 .— On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$2x^3+3x^2 < 12x-7.$$

1°) Établir le tableau de variation complet de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3+3x^2-12x+7$.

2°) Déduire que l'ensemble des solutions de l'inéquation est de la forme $]-\infty, a[$ où a est un réel < -2.

3°) Trouver un réel positif b tel que $f(b) = 0$.

4°) Déterminer explicitement le réel c tel que $f(x) = 2(x-b)^2(x-c)$. En déduire a.

5°) Quel est l'ensemble des solutions de $2x^3+3x^2 \leqslant 12x-7$?

Lundi 15 août : probabilités

Alea jacta est

Caius IULIUS Caesar (100 av. J.C. - 44 av. J.C.)

Exercice 1 . — Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive. Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité. Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

1°) Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

a) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?

b) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

2°) Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

3°) Pour augmenter la difficulté, le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche. Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

• la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;

• la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Exercice 2 . — Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

1°) Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc. D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70% des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60% ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20% des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche. On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

a) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

Réponse A : 3/5 **Réponse B :** 4/5 **Réponse C :** 3/50 **Réponse D :** 6/25

b) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

Réponse A : 21/50 **Réponse B :** 33/50 **Réponse C :** 3/5 **Réponse D :** 12/25

c) Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

Réponse A : 4/11 **Réponse B :** 6/25 **Réponse C :** 7/11 **Réponse D :** 33/50

2°) Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues. Les boules sont indiscernables au toucher. L'expérience consiste à tirer au hasard successivement avec remise 3 boules de l'urne.

a) La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

Réponse A : 11/81 **Réponse B :** 2/7 **Réponse C :** 5/84 **Réponse D :** 4/63

b) La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

Réponse A : 2/7 **Réponse B :** 16/81 **Réponse C :** 1/21 **Réponse D :** 79/84

c) On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne. Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'événement « obtenir au moins une fois trois boules bleues » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

Réponse A : 123 **Réponse B :** 122 **Réponse C :** 95 **Réponse D :** 94

Mardi 16 août : études de fonctions

Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer ...

Victor HUGO (1802-1885)

Exercice 1 . — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x + \sin x$.

1°) Montrer que la fonction f est croissante.

2°) Déterminer deux réels a et b tels que pour $x \in \mathbb{R}$, $x - a \leqslant f(x) \leqslant x + b$.

3°) Calculer la limite de f en $+\infty$

4°) Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5°) En déduire la limite de f en $-\infty$.

6°) Déterminer tous les $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $f'(x) = 0$.

7°) Déterminer les points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = x$.
Indication : On trouvera une infinité de points d'intersection.

8°) Déterminer les points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = x + 1$.
Indication : On trouvera une infinité de points d'intersection.

9°) Donner l'allure de la représentation graphique de f. Comment interprète-t-on graphiquement les résultats des questions 4°) et 6°) ?

Exercice 2 . — On note I l'intervalle $]0,1[$ et on considère les trois fonctions suivantes définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f : x \longmapsto e^x + \frac{1}{\ln x}, \qquad u : x \longmapsto x(\ln x)^2 \qquad \text{et} \qquad v : x \longmapsto e^{-x}$$

1°) Étudier les limites de la fonction f en 0 et en 1.

2°) Soit $x \in I$. Calculer la valeur de $f'(x)$. Déterminer alors la fonction g définie sur I telle que pour tout réel x de I, on ait : $f'(x) = \big(u(x) - v(x)\big)g(x)$.

3°) Étudier le sens de variation de u et de v sur $]0,1[$. On précisera les limites aux bornes de l'intervalle d'étude.

4°) Donner des valeurs approchées des nombres réels $u\left(\frac{1}{e^2}\right)$, $u\left(\frac{1}{2}\right)$, $v\left(\frac{1}{2}\right)$ et $v(1)$.
En déduire que $u(x) < v(x)$ pour tout élément x de $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, et que $u(x) < v(x)$ pour tout élément x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

5°) Dresser le tableau de variations de f sur $]0,1[$ et donner l'allure de sa représentation graphique.

Exercice 3 . — On note I l'intervalle $]0,+\infty[$ et on veut étudier la fonction f définie sur l'intervalle I par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2.$$

On appellera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1°) Soit u la fonction définie sur I par $u(x) = \ln(x) + x - 3$. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Démontrer alors que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

2°) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

3°) Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.
Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) - \ln(x) = \frac{2-\ln(x)}{x}$. En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

Mercredi 17 août : récurrences

If I feel unhappy. I do mathematics to become happy. If I am happy. I do mathematics to keep happy.

Alfréd Rényi (1921-1970)

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 .— Montrer par récurrence sur l'entier n que :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

Exercice 2 .— On considère une suite (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=2\,u_n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Montrer par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_n=2^n-1.$$

Exercice 3 .— Montrer par récurrence que $3\,n^2+3\,n+6$ est un multiple entier de 6 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 4 .— On considère une suite u définie par $u_0=0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_{n+1}=\frac{u_n+\frac{1}{n+1}}{2-u_n}.$$

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fraction irréductible.

2°) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et la démontrer par récurrence.

Exercice 5 .— Montrer par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 6 .— Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \forall n\in\mathbb{N}, \qquad 1+nx\leqslant(1+x)^n.$$

Jeudi 18 août : suites arithmétiques, géométriques

I know how to control the Universe. Why would I run to get a million, tell me?

Grigori PERELMAN (1966-∞))

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 .— On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}.$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 3$.

b) On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ pour tout entier naturel n. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

d) Démontrer que la suite (u_n) admet une limite et déterminer la valeur de cette limite.

Exercice 2 .— On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout n entier naturel

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3.$$

a) Calculer la valeur de u_3.

b) Justifier par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 6$ pour tout entier naturel n.

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente. Que vaut sa limite ?

d) On pose $v_n = u_n - 6$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

e) On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ pour tout entier naturel n. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n et la valeur des limites des suites (S_n) et $\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Exercice 3 .— Soit (u_n) la suite de terme général définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2^1} + \frac{1}{2 \times 2^2} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \cdots + \frac{1}{n \times 2^n}.$$

a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée.

b) En déduire qu'elle converge vers un réel ℓ et que $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.

Exercice 4 .— On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{2\, u_n}$.

a) Démontrer que $0 < u_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas la valeur de sa limite).

d) On pose alors $v_n = \ln(u_n) - \ln 2$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

e) Déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

Vendredi 19 août : nombres complexes

La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit,
mais c'est cet éclair qui est tout.

Henri POINCARÉ (1854-1912)

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 . — Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1°) $a = (1-2i)(5+i)-2.$

2°) $b = \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{3i-1}{i-3}.$

3°) $c = \dfrac{(i-1)\overline{(4-2i)}}{(5+2i)^2}.$

4°) $d = -i^{15}.$

Exercice 2 . — On pose $z = 2-3i$ et $Z = 1+i$, calculer le module de :

1°) $\bar{z}Z.$

2°) $z - Z.$

3°) $z^2 + \dfrac{1}{Z^2}.$

4°) $(1+z)(Z+2i).$

Exercice 3 . — Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants ; si nécessaire on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près en radians d'un argument.

a) $a = \sqrt{3} - 3i.$

b) $b = 5 + 5i.$

c) $c = -10i.$

d) $d = 3 - 4i.$

e) $e = -\sqrt{5} - i\sqrt{11}.$

Exercice 4 . — Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

a) $a = (1+i)\overline{(3+i\sqrt{3})}.$

b) $b = \dfrac{i-1}{i(\sqrt{2}+i\sqrt{6})}.$

c) $c = -2i.$

d) $d = (-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}})^3.$

e) $e = -a$ où $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 5 . — Résoudre les équations suivantes d'inconnue complexe z :

1°) $(2-i)z + 3 = 5iz - 2.$

2°) $\dfrac{iz-3}{z^2-9} = \dfrac{1+i}{2z-6}.$

3°) $3z + (1+i)\bar{z} = i.$

Exercice 6 . — On note

$$a = -3 - \sqrt{3}\,i, \qquad b = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \qquad \text{et} \qquad c = \frac{(1-i)^2}{1+\sqrt{3}\,i}.$$

1°) Placer, dans le plan, les points A d'affixe a et B d'affixe b. Il n'y a aucun calcul à faire, on se contentera d'utiliser $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$ l'approximation décimale de $\sqrt{3}$ à 10^{-1} près par défaut.

2°) Placer ensuite le point C d'affixe c.

3°) Que semble suggérer votre dessin concernant les trois points A, B, C ? Démontrer votre conjecture par le calcul.

Lundi 22 août : suites

A mathematician who is not also a poet will never be a complete mathematician.

Karl WEIERSTRASS (1815-1897)

Exercice 1 . — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2017}.$$

Démontrer par récurrence que $1 < u_n < 1 + \frac{1}{2016}$ pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 2 . — Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

1°) $u_n = \dfrac{n+\cos n}{2n^2+1}$.

2°) $u_n = \dfrac{2n-3}{1-5n}$.

3°) $u_n = \dfrac{2^n-3}{1-5^n}$.

4°) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n-1)$.

5°) $u_n = \dfrac{\ln(5n)}{\ln(3n)}$.

6°) $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{2n+3}}$.

7°) $u_n = \mathrm{e}^{2n} - 5\,\mathrm{e}^{n}$.

8°) $u_n = \dfrac{2^1}{1} + \dfrac{2^2}{2} + \dfrac{2^3}{3} + \cdots + \dfrac{2^n}{n}$.

Exercice 3 . — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$ pour tout entier naturel n. On désire étudier (u_n) par deux méthodes différentes.

1°) Première méthode.

a) Démontrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer la valeur de sa limite.

2°) Seconde méthode. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$.

a) Déterminer la dérivée de la fonction f et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que si $x \in [0,2]$, alors $f(x) \in [0,2]$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

c) Montrer que pour tout entier naturel n, le signe de la différence $f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est le même que celui de la différence $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer la valeur de sa limite.

Mardi 23 août : fonction exponentielle

Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée.

John VON NEUMANN (1903-1957)

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 . — Soit x un nombre réel. Simplifier l'expression $f(x) = e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2$.

Exercice 2 . —

1°) Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $4\,e^x - e^{3x} = 0$.

b) $e^{2x} + 9\,e^{-2x} - 10 = 0$.

2°) Pour chaque item, trouver tous les réels x vérifiant l'inégalité proposée :

a) $4\,e^x - e^{3x} > 0$.

b) $e^{2x} + 9\,e^{-2x} - 10 < 0$.

Exercice 3 . — Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites demandées sans utiliser de calculatrice :

a) $f\colon x \longmapsto x^2\,e^{-x} - x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) $h\colon x \longmapsto \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$ en 0 et en $+\infty$.

c) $k\colon x \longmapsto x\,e^{1/x}$ en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.

d) $g\colon x \longmapsto \dfrac{3\,e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 4 . — Pour chacune des fonctions suivantes, préciser sur quel(s) intervalle(s) la fonction considérée est dérivable et exprimer sa dérivée :

1°) $f\colon x \mapsto (\sin x)\,e^x$.

2°) $g\colon x \mapsto 3\,x^2\,e^{4-3x}$.

3°) $h\colon x \mapsto 2\,x\,e^{-x^2}$.

4°) $k\colon x \mapsto e^{-1/x}$.

Exercice 5 . —

a) Rappeler l'étude de la fonction $x \mapsto e^x$ ainsi que l'allure de sa courbe représentative.

b) Montrer que la tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$ au point de coordonnées $(1, e)$ passe par l'origine du repère.

Mercredi 25 août : fonction logarithme népérien

Le plus difficile, ce n'est pas de sortir de Polytechnique,
c'est sortir de l'ordinaire.

Charles DE GAULLE (1890-1970)

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 . —

1°) Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $\ln(10-x^2) = 2\ln(3) - \ln(x^2)$.

b) $(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0$.

2°) Pour chaque item, trouver tous les réels x vérifiant l'inégalité proposée :

a) $\ln(x^2 - 2\,\mathrm{e}^2) \leqslant \ln(x) + 1$

b) $\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geqslant 0$.

Exercice 2 . — Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites demandées sans utiliser de calculatrice :

a) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en 0 et en $+\infty$.

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)-2}{\ln(x)-1}$ en $+\infty$.

c) $x \longmapsto x\sqrt{1+(\ln x)^2}$ en 0 et en $+\infty$.

d) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 3 . — Pour chacune des fonctions suivantes, préciser sur quel(s) intervalle(s) la fonction considérée est dérivable et exprimer sa dérivée :

1°) $f : x \mapsto \ln(\cos x)$.

2°) $g : x \mapsto \frac{x}{\ln(x^2)}$.

3°) $h : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Exercice 4 . —

1°) Justifier la double inégalité suivante pour tout réel t de $[0, +\infty[$:

$$1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1 - t + t^2.$$

2°) En déduire que pour tout réel x de $[0, +\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Jeudi 25 août : intégration

The only thing greater than the power of the mind
is the courage of the heart.

John NASH (1928-2015)

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 .— Calculer les valeurs des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x^4\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(t)\,\mathrm{d}t.$

c) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t.$

d) $\displaystyle\int_{2}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t.$

f) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t.$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1} 9x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x.$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$

j) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t.$

Exercice 2 .— Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$F(x)=\int_0^x \ln(2+t)\,\mathrm{d}t.$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1°) $F(0)=\ln 2$.

2°) Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$F'(x)=\frac{1}{2+x}.$$

3°) La fonction F est croissante sur $[0,+\infty[$.

4°) On a

$$\int_3^4 \ln(2+t)\mathrm{d}t = F(4)-F(3).$$

Exercice 3 .— Peut-on trouver une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\ln(1+\mathrm{e}^x)\ ?$$

Exercice 4 .— Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n=\int_0^1 (x+\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x.$$

1°) Calculer explicitement la valeur de I_n en fonction de n.

2°) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et admet une limite ℓ dont on calculera la valeur.

Vendredi 26 août : intégration, le retour

Un problème digne d'attaque montre sa valeur en ripostant.

Pál Erdős (1913-1996)

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 .— Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et positive (on ne cherchera pas à calculer explicitement sa valeur).

b) Prouver que pour tout réel t de $[0,1]$, on a

$$\frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n.$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 .— Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1°) Soit a et b deux réels. On pose $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$ pour tout réel x. Déterminer les valeurs de a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2°) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 .— Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (t+2)\mathrm{e}^{t/2}$. On note

$$I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1°) Interpréter géométriquement le réel I.

2°) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t$ et $v(t) = \mathrm{e}^{t/2}$. Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.

3°) En déduire la valeur de I.

Exercice 4 .— Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ telle que

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par

$$I_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1°) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2°) On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0,+\infty[$, on a : $\mathrm{e}^x - x \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2}$. Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$I_n \leqslant \int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

3°) Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ telle que $H(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$. Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

4°) En déduire que $I_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.

5°) Montrer enfin que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.