

A detailed engraving of John von Neumann, showing him from the chest up. He has thick, curly hair and is wearing a dark, high-collared coat with decorative buttons and a sash. The background is a light, textured grey.

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques  
sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne  
réalisent pas à quel point la vie est compliquée »

John VON NEUMANN

# Cahier de vacances Mathématiques

Lycée Jean-Baptiste Kléber

« Rien n'est beau comme Kléber un jour de combat »  
Napoléon BONAPARTE

KLÉBER.

### Préambule

Nous avons conçu ce polycopié afin que vous abordiez la première année de « prépa ECG » dans les meilleures conditions.

Les deux années de préparation aux concours comportent un programme conséquent en Mathématiques (aussi bien dans les parcours de Mathématiques Approfondies que de Mathématiques Appliquées) qui s'appuie sur ce que vous avez vu en classe de Première et de Terminale (en Spécialité Mathématiques et/ou en option Mathématiques Complémentaires). Il est donc souhaitable que vous ayez des bases les plus solides possibles sur lesquelles vous appuyer dès la rentrée prochaine.

Afin que vous soyez efficaces dès votre arrivée en première année, nous vous recommandons de :

- bien vous reposer pour être en bonne forme physique
- utiliser le travail proposé dans ce polycopié pour solidifier vos connaissances avant la rentrée

Le planning est prévu pour une quinzaine de jours. Chaque page aborde un thème différent.

En premier lieu, nous vous conseillons de revoir le cours et les exercices vus au lycée sur le thème abordé.

Ensuite, nous vous proposons des exercices que vous pourrez travailler. Nous vous suggérons d'y consacrer 1 ou 2 heures par jour.

Certains exercices sont relativement faciles mais d'autres le sont beaucoup moins. L'objectif n'est pas de terminer tous les exercices chaque jour mais de vous amener à réfléchir sur chaque thème.

Chacun peut travailler à son rythme, compte tenu des acquis qui sont les siens.

Et maintenant, bonnes vacances, bonne lecture et bon travail.

## Calculs algébriques, développer, factoriser

### Exercice 1

Soient  $a, b$  et  $c$  des réels. Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$((a-c)-(a-b)) - ((b-c)-(a+c)) =$$

$$1 - (1 - (1-a)) - (1 - (1-b)) - (1 - (1-c)) =$$

$$a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) =$$

$$(a+b)^2 =$$

$$(a+b)^3 =$$

$$(a+b)^4 =$$

$$(a+b+c)^2 =$$

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer et simplifier les expressions suivantes (on mettra le résultat sous la forme  $a^b$ ):

$$\frac{100 \times 10^{-7}}{0,001 \times 10^5} =$$

$$3^{2n} \times 4^n =$$

$$3 \times 4^n + 2^{2n} =$$

$$2^n + 2^n =$$

$$2^{n+1} - 2^n =$$

$$\frac{3^n}{9^{n-1}} =$$

### Exercice 3

Soit  $n \geq 2$ . Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{7}{2} - \frac{4}{3} =$$

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{20} + \frac{2}{15} =$$

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} =$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} =$$

$$\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} =$$

$$\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n+1}} =$$

$$\frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n-1}} =$$

### Exercice 4

Soient  $x \geq 0$  et  $y \in \mathbb{R}$ . Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$$(2x+1)(x-3) + (5x-1)(3-x) =$$

$$4x-8 + (3x-6)^2 =$$

$$16x^2 - 9 =$$

$$4x^2 - 4x + 1 =$$

$$x + 6\sqrt{x} + 9 =$$

$$x^2 - 5x + 6 =$$

$$xy - y - x + 1 =$$

## Equations

### Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{1}{x-3} + 5 = 0$$

$$|2x+1| = 3$$

$$(2x+3)(-4+x) = 0$$

$$5x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$2x^2 - x + 3 = x^2 - x + 5$$

$$x^8 - 2x^4 + 1 = 0$$

$$\frac{x-1}{2x} = \frac{x}{2x-1}$$

$$\frac{x}{1-x} + 4 = \frac{2x}{x-1}$$

$$\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$8x^3 - 27 = 0$$

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{4-x^2}} = 1$$

### Exercice 2

Soit  $a$  un réel fixé. Résoudre l'équation d'inconnue  $x$  :  $ax^2 + (1-x)^2 = 3ax$

(On pourra traiter différents cas suivant la valeur de  $a$ )

### Exercice 3

1) Résoudre le système d'équations suivant 
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

2) Résoudre le système d'équations suivant 
$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 8x + 16y = 4 \end{cases}$$

3) Résoudre le système d'équations suivant 
$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y + 2z = 18 \end{cases}$$

## Inégalités

### Exercice 1

Dresser le tableau de signe des fonctions

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 + x - 1}{-x^2 + 2x - 2}$$

$$g : x \mapsto \frac{\ln(x) - 3}{4 - e^{2x}}$$

### Exercice 2

Résoudre les inégalités suivantes :

$$3 - 27x^2 \leq 0$$

$$x > 2 + \frac{3}{x}$$

$$\frac{1-x^2}{2x-2} > \frac{3-x}{2}$$

$$\frac{x-8}{2x-1} - 1 \leq \frac{4}{1-x}$$

$$|1-x| \leq 2$$

$$\sqrt{x+1} > \sqrt{2x^2+x}$$

### Exercice 3

On souhaite résoudre l'inéquation  $2x^3 + 3x^2 < 12x - 7$  (\*)

- 1) Faire le tableau de variation complet de la fonction  $P : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$
- 2) En déduire que l'ensemble des solutions de l'inéquation (\*) est de la forme  $] -\infty, a[$  avec  $a < -2$
- 3) En utilisant le résultat de la question 1)
  - a) Expliquer pourquoi  $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$  peut se factoriser par  $(x-1)$
  - b) Expliquer pourquoi  $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$  doit nécessairement se factoriser par  $(x-1)^2$
  - c) En déduire la factorisation complète du polynôme P et donner la valeur de a

**Encadrements, valeurs approchées**

Exercice 1

Ranger par ordre croissant les nombres suivants (sans calculatrice !)

$$(-0,2)^3 \quad 0,1^2 \quad (-0,1)^3 \quad (-0,1)^4 \quad \frac{7}{2} \quad \sqrt{10} \quad 3 \quad \sqrt{2}^3$$

Exercice 2

Donner une valeur approchée la plus précise possible (sans calculatrice) des nombres

$$\frac{3\pi}{7} \quad e^{-2} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \quad \frac{\sqrt{12}}{2}$$

Exercice 3

Soit  $x \in [0;2]$ . Montrer que  $\frac{1}{3} \leq \frac{2x^2+1}{x+1} \leq 9$  et que  $-5 \leq \frac{x^2+1}{x-3} \leq -\frac{1}{3}$

Exercice 4

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et donner un contre-exemple lorsqu'elles sont fausses.

Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a < b$ . Alors  $a^2 < b^2$

Soient  $a$  et  $b$  des réels non nuls tels que  $a < b$ . Alors  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ .

Soit  $a$  un réel positif. Alors  $\sqrt{a} \leq a$

Soit  $a$  un réel. Alors  $a^3 \leq a^4$

Soit  $a$  un réel négatif. Alors  $\sqrt{a^2} = -a$

Exercice 5

1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{n}{2}$

2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1) \leq (2n+1)^n$

## Trigonométrie

### Exercice 1

Compléter :

$$\begin{array}{ccccc} \cos(0) = & \sin(0) = & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = & \cos(\pi) = & \sin(\pi) = & \cos(6\pi) = & \sin(-3\pi) = \end{array}$$

### Exercice 2

- 1) Tracer la représentation graphique des fonctions sinus et cosinus en y faisant apparaître les valeurs de l'exercice précédent.
- 2) Les fonctions sinus et cosinus sont-elles paires ? impaires ?

### Exercice 3

- 1) Soient  $x$  et  $y$  deux réels. Compléter les 5 formules suivantes :

$$\begin{array}{ll} \cos(x+y) = & \sin(x+y) = \\ \cos(x-y) = & \sin(x-y) = \\ (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = & \end{array}$$

- 2) En déduire les formules suivantes :

$$\begin{array}{ll} \cos(2x) = & \sin(2x) = \\ \cos(x+\pi) = & \sin(\pi-x) = \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = & \end{array}$$

### Exercice 4

- 1) Déterminer tous les  $x \in [0, 2\pi]$  tels que  $\cos(x) = 0$
- 2) Déterminer tous les  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $\cos(x) = 0$
- 3) Déterminer tous les  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $\sin(x) \geq 0$

### Probabilités

#### Exercice 1

On lance un dé truqué à 6 faces. On note  $X$  le résultat obtenu.

La loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  est donnée par le tableau ci-dessous :

| $x_i$        | 1   | 2    | 3 | 4    | 5   | 6   |
|--------------|-----|------|---|------|-----|-----|
| $P(X = x_i)$ | 0,2 | 0,25 |   | 0,25 | 0,1 | 0,1 |

- 1) Trouver la probabilité manquante.
- 2) Calculer l'espérance de  $X$ .
- 3) On joue avec ce dé au jeu suivant : on mise 1 euro puis on lance une fois le dé et on reçoit une somme égale au score affiché multiplié par 0,30 euro.  
Calculer l'espérance de gain pour le joueur. Le jeu est-il équitable ?

#### Exercice 2

On dispose d'une pièce de monnaie truquée qui a une chance sur 4 de donner Pile à chaque lancer.

- 1) On lance 3 fois cette pièce dans des conditions identiques.
  - a) Faire un arbre pour représenter la situation.
  - b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 Piles ? 3 Faces ?
  - c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 Pile ? exactement 1 Face ?
- 2) On lance 20 fois cette pièce dans des conditions identiques.
  - a) Soit  $X$  le nombre de Piles obtenus. Reconnaître la loi de  $X$ .
  - b) En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .

#### Exercice 3

Une usine utilise 2 machines pour fabriquer des composants électroniques.

40% de la production provient de la machine A et le reste de la machine B.

5% des pièces produites par la machine A et 3% des pièces produites par la machine B sont défectueuses.

On choisit une pièce au hasard dans la production.

- 1) Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
- 2) On constate que la pièce a un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine A ?
- 3) On choisit 2 pièces au hasard dans la production. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les deux défectueuses et qu'elles proviennent de 2 machines différentes ?



## Réurrences

### Exercice 1

On considère une suite définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$ .

Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$

### Exercice 2

Montrer par récurrence que  $3n^2 + 3n + 6$  est un multiple de 6 pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 3

Montrer par récurrence que :  $\forall n \geq 2, \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

### Exercice 4

Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

### Exercice 5

Montrer par récurrence que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, 1 + nx \leq (1+x)^n$

### Exercice 6

On considère une suite définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{1}{n+1}}{2 - u_n}$ .

Calculer les premiers termes de la suite et conjecturer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
Démontrer ensuite le résultat par récurrence.

### Exercice 7

On considère la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2023}$ .

Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < u_n < 1 + \frac{1}{2022}$

**Suites arithmétiques et géométriques**

Exercice 1

- 1) Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique telle que  $u_3 = 5$  et  $u_8 = 12$ . Combien vaut  $u_{31}$  ?
- 1) Soit  $(v_n)$  une suite géométrique telle que  $v_{12} = 3$  et  $v_{15} = 24$ . Combien vaut  $v_3$  ?

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes de 2 façons différentes:

$$20 + 23 + 26 + 29 + 32 + 35 + 38 + 41 + 44 + 47 + 50 + 53 =$$

$$5 + 15 + 45 + 135 + 405 + 1215 + 3645 =$$

Exercice 3

On considère la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$ .

- 1) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 3$ .
- 2) On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ . Vérifier que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique.
- 3) En déduire l'expression de  $v_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Exercice 4

On considère la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ .

- 1) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2$ .
- 2)a) Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
- b) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge. Quelle est la seule limite possible pour la suite ?
- 3) On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$ .
- a) Vérifier que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique.
- b) En déduire l'expression de  $v_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c) Retrouver la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Fonction exponentielle

### Exercice 1

Soit  $x$  un nombre réel. Simplifier les expressions :

$$e \times \frac{(e^x)^2}{e^{x+2}} = \qquad e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2 =$$

### Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll} 4e^x + 3 = 5 & 5e^x + 2 \geq 1 & 4e^x - e^{3x} = 0 \\ e^{2x} - 9e^{-2x} - 10 = 0 & 4e^x - e^{3x} > 0 & e^{2x} - 9e^{-2x} - 10 < 0 \end{array}$$

### Exercice 3

- 1) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle.
- 2) Rappeler les limites de la fonction exponentielle. Sont-elles en accord avec votre dessin précédent ?
- 3) Montrer que la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 1 passe par l'origine.

### Exercice 4

Donner la dérivée des fonctions suivantes (sur leur ensemble de définition)

$$f : x \mapsto (\sin x)e^x \qquad g : x \mapsto 3x^2e^{4-3x} \qquad h : x \mapsto \frac{2x}{e^{x^2}} \qquad k : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$$

### Exercice 5

Déterminer les limites demandées (d'abord sans calculatrice puis en vérifiant à la calculatrice)

$$\begin{array}{lll} e^x - 3x \text{ en } -\infty \text{ et en } +\infty & e^{2x} - 5e^x \text{ en } -\infty \text{ et en } +\infty & x^2e^{-x} - x \text{ en } -\infty \text{ et en } +\infty \\ xe^{\frac{1}{x}} \text{ en } +\infty \text{ et en } 0 & \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \text{ en } -\infty \text{ et en } +\infty & \frac{e^{3x} - 1}{x} \text{ en } +\infty \text{ et en } 0 \end{array}$$

## Fonction logarithme népérien

### Exercice 1

Soit  $x$  un réel strictement positif. Simplifier les expressions :

$$\ln x - \ln \sqrt{x} = \ln(x^2) + 3 \ln\left(\frac{1}{x}\right) =$$

### Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$5 \ln(x+1) + 3 = 0 \qquad 3 \ln(4-x) - 4 \geq 0 \qquad \ln(10-x^2) = 2 \ln 3 - \ln(x^2)$$

$$(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0 \qquad \ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0$$

### Exercice 3

1) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction  $\ln$ .

2) Rappeler les limites de la fonction  $\ln$ . Sont-elles en accord avec votre dessin précédent ?

### Exercice 4

Donner la dérivée des fonctions suivantes (sur leur ensemble de définition)

$$f : x \mapsto \ln(\cos x) \qquad g : x \mapsto \frac{x}{\ln(x^2)} \qquad h : x \mapsto \sqrt{x} \cdot \ln x$$

### Exercice 5

Déterminer les limites demandées (d'abord sans calculatrice puis en vérifiant à la calculatrice)

$$\begin{array}{lll} 1 - \ln(4-3x) & \text{en } -\infty \text{ et en } \frac{4}{3} & \ln(2x+1) - \ln(x-1) \text{ en } +\infty \qquad \frac{\ln(x)-2}{\ln(x)-1} \text{ en } +\infty \\ \frac{\ln(5x)}{\ln(3x)} & \text{en } 0 & \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \text{ en } 0 \text{ et en } +\infty \qquad x\sqrt{1+(\ln x)^2} \text{ en } +\infty \text{ et en } 0 \end{array}$$

### Exercice 6

1) Justifier que  $\forall t \geq 0, 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

2) En déduire que  $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

## Etudes de fonctions

### Exercice 1

Faire l'étude complète (ensemble de définition, variations, limites...) des fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 5}{2x + 2} \qquad g : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

### Exercice 2

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x + \sin x$

- 1) Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) En remarquant que la fonction sinus est minorée, montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 3) Exprimer  $f(-x)$  en fonction de  $f(x)$  et en déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
- 4) Résoudre les équations  $f(x) = x$ ,  $f(x) = x - 1$  et  $f(x) = x + 1$
- 5) Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

### Exercice 3

$f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
On considère la fonction  $x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$

- 1) Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$
- 2) Démontrer que  $\forall x > 0, f'(x) = \frac{\ln x + x - 3}{x^2}$ .
- 3)a) Vérifier que la fonction  $g : x \mapsto \ln x + x - 3$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$   
b) En déduire que  $g$  ne s'annule qu'une seule fois en un réel  $a \in [2, 3]$
- 4) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 5) Justifier que l'équation  $f(x) = \ln x$  possède une solution et une seule que l'on précisera.

## Intégrales

### Exercice 1

Calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^3 x^4 dx =$$

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt =$$

$$\int_0^1 e^{-3x+2} dx =$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^3} dx =$$

$$\int_0^9 4 - \sqrt{t} dt =$$

$$\int_0^{3\pi/4} \sin(x) dx =$$

$$\int_1^e \frac{\ln t}{t} dt =$$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt =$$

$$\int_0^1 9x^2 \sqrt{1+x^3} dx =$$

### Exercice 2

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $F : x \mapsto (ax + b)e^x$  soit une primitive de la fonction  $f : x \mapsto xe^x$

En déduire la valeur de  $\int_0^1 xe^x dx$ .

### Exercice 3

On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$

- 1) Justifier (sans la calculer) que la suite  $(I_n)$  est décroissante et convergente.
- 2) Calculer la valeur de  $I_n$  et déterminer la limite de la suite  $(I_n)$ .

### Exercice 4

On pose  $\forall x \geq 0, F(x) = \int_0^x \ln(2+t) dt$ .

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

$$F(0) = \ln 2$$

$$F(0) = 0$$

$$\int_3^4 \ln(2+t) dt = F(4) - F(3)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2+x}$$

$$F'(x) = \ln(2+x)$$

F est croissante sur  $[0, +\infty[$