

## Conseils aux futurs étudiants de ECG en mathématiques appliquées pour l'année 2023-2024

### Programme de première année ECG mathématiques appliquées

Il porte essentiellement sur les points suivants :

#### I. Analyse

1. Suites et séries : suites classiques, convergence.
2. Fonctions : limites, continuité, dérivation.
3. Intégrales sur un segment.
4. Equations différentielle.

#### II. Probabilités et statistiques

1. Statistiques univariées
2. Probabilité sur un ensemble fini – probabilité conditionnelle – indépendance.
3. Probabilités discrètes. Variables aléatoires discrètes. Lois de probabilité discrètes usuelles.

#### III. Algèbre linéaire

1. Théorie des graphes.
2. Matrices, systèmes linéaires.
3. Espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , sous espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ , applications linéaires.

#### IV. Informatique

Programmation en langage PYTHON d'algorithmes divers (calcul numérique, traitement statistique, simulation de phénomènes aléatoires)

**Questions des programmes des années précédentes devant être parfaitement maîtrisées à la rentrée en ECG mathématiques appliquées**

1. Calculs algébriques : manipulation de fractions - puissances – logarithmes – exponentielles – factorisations – simplifications des expressions – manipulation d'inégalités.
2. Fonctions – limites – dérivation – intégration – fonctions exponentielles – logarithmes – puissances.
3. Suites – suites arithmétiques – suites géométriques.
4. Probabilités et statistiques.
5. Algorithmique (langage Python) : variables, instructions conditionnelles, boucles.

Il est conseillé, quinze jours avant la rentrée, de vérifier et consolider cette maîtrise en se replongeant dans son cours de terminale sur ces chapitres et en refaisant les exercices et les devoirs de façon approfondie. Ci-joint une feuille d'exercices qui sera utilisée à la rentrée, vous pouvez vous entraîner dessus et vous faire une idée des calculs que vous apprendrez l'année prochaine à faire efficacement.

Remarque : Les calculatrices sont interdites aux écrits des concours.

Il est donc nécessaire de maîtriser les calculs et de connaître par cœur les formules et les résultats importants.

## Exemple d'exercices en ECG math appliquées 1<sup>ère</sup> année sur les opérations et fonctions usuelles

### 1) Simplifications d'expressions algébriques.

Quelques principes : repérer les simplifications immédiates et les facteurs communs.

$$A = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n \frac{n(n+1)}{2} + n^3, \quad B = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2}, \quad C = \frac{5n+2}{4} - \frac{(2n+1)(8n-1)}{12n},$$

$$D = \frac{k-1}{4n^2} (k-1+2n-k+1) + \frac{2n(2n-k+1)}{4n^2}, \quad E = \frac{1}{4n^2} \left( 2 \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{2n(2n+1)}{2} \right),$$

$$F = 1 - (k+1)x^k + \frac{1-x^{k+1}}{1-x} - 1, \quad G = \frac{1 \cdot n \cdot \binom{1}{2}^{n+1} - (n+1) \cdot \binom{1}{2}^n + 1}{2 \cdot \binom{1}{2}^2} + \frac{n(2-1)}{2^n},$$

$$H = r \left( \frac{r}{r+1} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{r+1} + 1 - \left( \frac{r}{r+1} \right)^n, \quad I = \left( \frac{r}{r+1} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{r(r+1)} \cdot \frac{r(r-1)}{2} + 1 - \left( \frac{r}{r+1} \right)^n,$$

On suppose pour les expressions suivantes que  $p+q=1$  :

$$J = p^2 + pq + q, \quad K = np^2 + p(p+q)^n + npq, \quad L = p^2 q^{2n-2} + 2 p^2 q^{n-2} \left( \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) - (q^2)^{n-1} (1-q^2).$$

### 2) Simplifications de fractions.

Quelques principes : penser aux conditions d'existence, attention à la position des barres de fraction (cf B et C), factoriser au numérateur et au dénominateur (cf ÷ de la famille de ×), réduire au même dénominateur (judicieux) si nécessaire.

$$A = \frac{a - \frac{a^2}{b}}{b - \frac{a^2}{b}}, \quad B = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{(a-b)}{ab}}, \quad C = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{ab}, \quad D = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}, \quad E = \frac{16}{12x-4} - \frac{15x+5}{(3x+1)^2} + \frac{9x}{9x^3-x}.$$

### 3) Simplifications d'expressions avec radicaux.

Quelques principes : penser aux conditions d'existence, utiliser l'expression conjuguée pour supprimer le radical au dénominateur, factoriser sous le radical (cf  $\sqrt{\quad}$  de la famille de ×), savoir simplifier  $\sqrt{x^2}$ ,  $\frac{x}{\sqrt{x}}$ .

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}-2}, \quad B = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}, \quad C = \frac{\sqrt{2}-1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad D = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{4} - 1 \right) \left( \frac{1-\sqrt{5}}{4} - 1 \right).$$

### 4) Manipulations de puissances et de logarithme.

Simplifier les expressions suivantes en précisant à quelles conditions sur les paramètres elles ont un sens :

$$A = \ln(\frac{1}{e}) + 2 \ln(\frac{1}{e^2}) - \ln(\frac{1}{e^3}) \text{ , } \quad B = 2 \ln 2 - \ln(16e) + \ln(4e^2) \text{ , } \quad C = \ln(108) - 2 \ln(\frac{10^2}{6}) \text{ .}$$

$$D = \ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) \text{ , } \quad E = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{1 + e^{2x}}{1 - e^{2x}} \text{ , } \quad F = \frac{(-2a^2)^n - 2(-2a)^{n-1} a^{n+1}}{(6a)^{n+1}}$$

**5) Obtentions d'inégalités .**

**Méthodes : par manipulation d'inégalités ou étude du signe d'une fonction en factorisant ou par ses variations)**

- a) Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On suppose  $a \leq b$ . Peut-on en déduire une inégalité entre  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{b}$  ; entre  $2a$  et  $2b$ , entre  $-b$  et  $-a$ , entre  $a^2$  et  $b^2$ , entre  $a^3$  et  $b^3$  ?
- b) Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs. Démontrer l'inégalité :  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ .  
En déduire que si  $a, b$  et  $c$  sont trois réels positifs on a :  $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ .
- c) Montrer que pour tous réels  $x$  et  $a$  strictement positifs on a :  $\frac{x}{-a} + \frac{a}{x} \geq 2$ .
- d) Montrer que pour tout  $t > 0$ ,  $\ln(1+t) \leq t$ . En déduire que pour tout réel  $x$  :  $\exp(x) \geq x - 1$ .
- e) Montrer que pour tout  $t \geq 0$  :  $1+t \geq \sqrt{1+t^2}$ .
- f) Montrer que pour tout  $t \in ]0;1]$ ,  $\frac{1}{t} \leq \frac{\exp(t)}{t} \leq \frac{e}{t}$ .
- g) Montrer que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\exp(t) \geq \frac{1}{2}t^2$
- 

**6)** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x(e^x - 2) - 3$ .

- a) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  en en déduire les variations de celle-ci.
- b) Démontrer que  $f(x) < -3 \Leftrightarrow e^x < 2$ .
- c) En déduire l'ensemble solution de l'inéquation  $f(x) < -3$ .
- 

**7)** On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$ .

$C$  est la courbe représentant  $f$  dans un repère orthonormal.

- a) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- b) Donner une équation de la tangente  $T$  à  $C$  au point d'abscisse 0.
- c) Etablir la concavité de  $f$ .
- d) Tracer  $C$  et  $T$ .
- e) Soit  $m$  un réel fixé. Ecrire  $f(x)$  sous la forme  $\ln(u(x))$  puis résoudre l'inéquation :  $f(x) < m$ .  
Que peut-on en déduire sur  $f$ ?
- f) Ecrire un algorithme (ou un programme Python) donnant les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  variant de 0,1 en 0,1 entre  $-0,9$  et  $3$  ; l'exécuter (sur calculatrice ou avec Python) ; commenter.
- 

**8)** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^2 - 4x + 3$ .

- a) Dresser le tableau de variations de  $g$ .  
En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^{g(x)}$ .

**b)** Déterminer les solutions de l'équation  $f(x) = 1$ .

En déduire un encadrement de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[1;3]$ .